Clasa a XI-a

Problema 1

Să se determine $a, b > 0$ astfel încât $a^x + b^x \geq x^a + x^b$ $\forall x \in (0, \infty)$

Costică Ambrinoc, Rm Sărat.

Soluție

Avem (eventuală demonstrație) că $e^x \geq x^e$ $\forall x \in (0, \infty)$ cu egalitate când $x = e$ (2p).

Inegalitatea din enunț trebuie să aibă loc și pentru $x = e$ deci (1p).

$$a^e + b^e \geq e^a + e^b$$

Avem deci $\left.\begin{matrix} e^a \geq a^e \\ e^b \geq b^e \end{matrix}\right\}$ (1p)

$$\Rightarrow e^a + e^b \geq a^e + b^e \geq e^a + e^b$$

În concluzie $a^e + b^e = e^a + e^b$ și inegalitățile (1p)

$e^a \geq a^e$
$e^b \geq b^e$ devin egalități $\Rightarrow a = e$ și $b = e$ (2p)